

## Programm GeoGebra teema: „Funktsiooni graafikute teisendused“ käsitlemisel

### 1. VAHENDI TEHNILINE KIRJELDUS

Arvutiprogramm **GeoGebra** on allalaaditav aadressilt <http://www.geogebra.org>.

Programmi saab kasutada eestikeelsena, selleks tuleb enne allalaadimist valida kasutamiskeeleks „estonian“, s.t. eesti keel.



The screenshot shows the GeoGebra website interface. At the top left is the GeoGebra logo. At the top right is a language selection dropdown menu with 'Estonian' selected. On the left is a sidebar with navigation links: Sissejuhatus, Lühituvustus, Käivita veebist, Laadi alla, Abi, Ekraanipildid, Näited, Versioonid (ingl k), Tänu sõnad (ingl k), Kontakt (ingl k), Toetage GeoGebrat! (ingl k), and GeoGebraWiki (final k). The main content area has a heading 'Tere tulemast GeoGebra kodulehele' followed by a paragraph describing the software. Below this is a section 'Tutvu programmiga GeoGebra' with a bulleted list of links. On the right, there is a box for 'Introduction to GeoGebra (Online & Print)' and a 'Call for proposals' section.

Programm on küll tõlgitud eesti keelde, kuid sellel programmil puudub põhjalik eestikeelne juhend ja ka programmi kodulehel olevad näited on ingliskeelsed. Samas julgustan kõiki huvilisi seda programmi kasutama, sest ka väga lünkliku inglise keele oskusega on võimalik aru saada mida tehakse ja mis on selle tegevuse tulemus. Kui soovite programmi ingliskeelset manuaali, siis selle leiate aadressilt <http://www.geogebra.org/help/docuen.pdf>.

GeoGebra näol on tegemist vabavaralise programmiga, mille kasutamise eest kasutaja mitte kellelegi tasuma ei pea. Tundub, et selle programmi puhul puuduvad ka piirangud kommerts-eesmärkidel kasutamise kohta.

Programmi saab oma arvutisse kasutades (v.t. pilti) *allalaadimist* või *laadimist veebist*. Mõlemal juhul on vajalik arvutipoolne JAVA toetus ning programmi uuenduste puhul küsitakse kasutajalt, kas nad soovivad uuendusi oma arvutisse.

## 2. KASUTAMISÕPETUS. PROGRAMMI RAKENDATAVUS

Programm on kasutatav õppeprotsessis demovahendina (lihtsamaid asju saab aga vahetult tunnis teha, näiteks joonesta mõne funktsiooni graafikut, leida lõikepunktide koordinaate või joonestada tasandilisi kujundeid) ning seda programmi saavad õpilased kasutada ka koduste tööde tegemisel ja uute teemade omandamisel.

**NB!** Valminud töölehe salvestamisel tekib fail nimega \*.ggb. Seda faili on võimalik käivitada juhul, kui arvutis on programm GeoGebra. Kuid on olemas ka meeldiv alternatiiv. Kui soovitakse tööleht üles panna oma veebilehele või on mõte tööleht käivitada mälu-pulgalt, sel juhul tuleb tööleht salvestada html-failina. Selleks, et html formaadis fail hiljem käivituks, on vaja salvestada ühte kausta (mälu-pulgale) mõlemad failid, s.t. nii \*.ggb kui ka \*.html. Selleks, et tööleht salvestada veebilehena, s.t. html-formaadis, tuleb toimida nii: Menüü File, valige Ekspordi -> Dünaamiline tööleht kui veebileht (html). Pärast toimige nii, nagu pildil näidatud.

The screenshot shows a web form for saving a worksheet. At the top, there are input fields for 'Pealkiri:' (Title) with the text 'Siia kirjutage töölehe nimi', 'Autor:' (Author) with 'Allar Veelmaa', and 'Kuupäev:' (Date) with 'v, 5. Oktoober 2008. a'. Below these is a tabbed interface with the 'Üldine' (General) tab selected, showing the 'Edasijõudnuile' (Advanced) options. Under the heading 'Tekst konstruktsiooni kohal:' (Text construction location), there is a text area containing 'Kirjutage, mida soovite teha. Siin võivad olla ka lihtsad tööülesanded.' (Write what you want to do. Here there can also be simple assignments.) To the right of the text area are two dropdown menus, one with a circle icon and one with the Greek letter alpha. Below this is a radio button selection with 'Dünaamiline tööleht' (Dynamic web page) selected and 'Nupp konstruktsiooni akna avamiseks' (Button for opening the construction window) unselected. Under the heading 'Tekst peale konstruktsiooni:' (Text above construction), there is another text area containing 'Parim koht, kuhu saab kirjutada tööülesanded.' (Best place to write assignments.) To the right of this text area are also two dropdown menus, one with a circle icon and one with the Greek letter alpha.

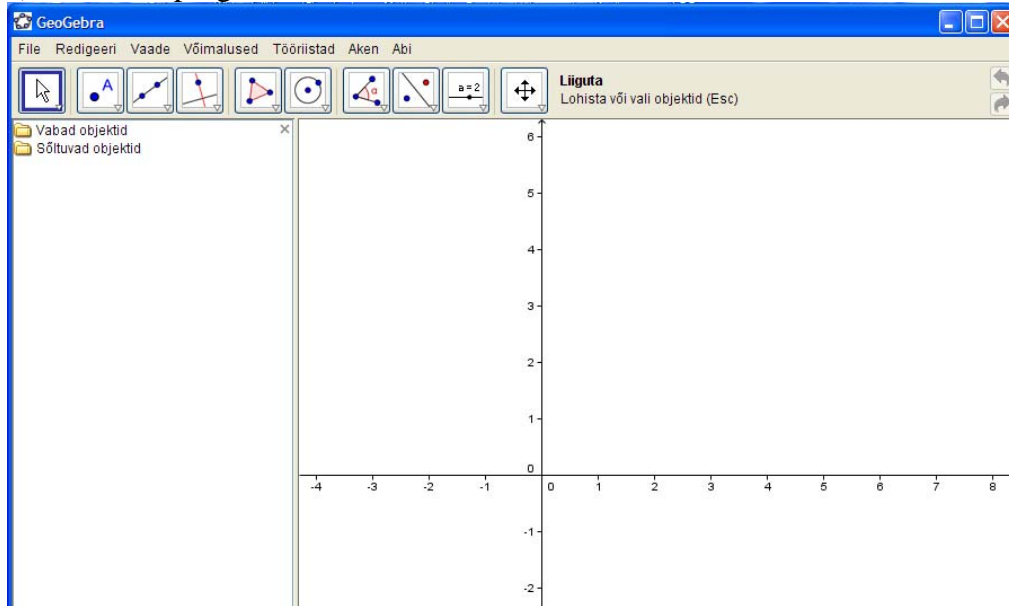
Kindlasti on vaja kasutada nuppu „Edasijõudnule“, kus on vaja ära märkida „linnukesega“ kõik pakutavad võimalused.

Programmi kasutamiseks pole arvutile erinõudeid. Arvutiklassis töötades on muidugi hea, kui arvutite monitorid on võimalikult suure diagonaaliga, kuid ka 15 tollise monitoriga on pilt hästi jälgitav. Värviprinteri olemasolul on võimalik trükkida paberile või kilele funktsioonide graafikuid mitmevärvilisena.

## Eeltöö graafikute joonestamiseks programmiga GeoGebra


Graafikute joonestamise puhul soovitan kasutada taustana ruudustikku. Selle saamiseks teeme nii:

a) käivitame programmi;



b) menüüst „Vaade“ märgime „linnukesega“ menüüriba „Ruudustik“;



c) koordinaadistiku nullpunkti asukoha muutmiseks vajutame nupule  ja hoides all hiire vasakut nuppu saab koordinaatteljestiku asukohta muuta. Kui aga kasutame hiire rullikut, siis on võimalik muuta joonist suuremaks või väiksemaks;

d) telgedel olevate arvude suuremaks muutmiseks (et joonis oleks hästi jälgitav) valime menüüst „Võimalused“ riba „Kirja suurus“ ja edasi juba soovitud kirja suuruse. Projektori abil graafikute demonstreerimisel on piisavaks kirja suuruseks 24 pt;

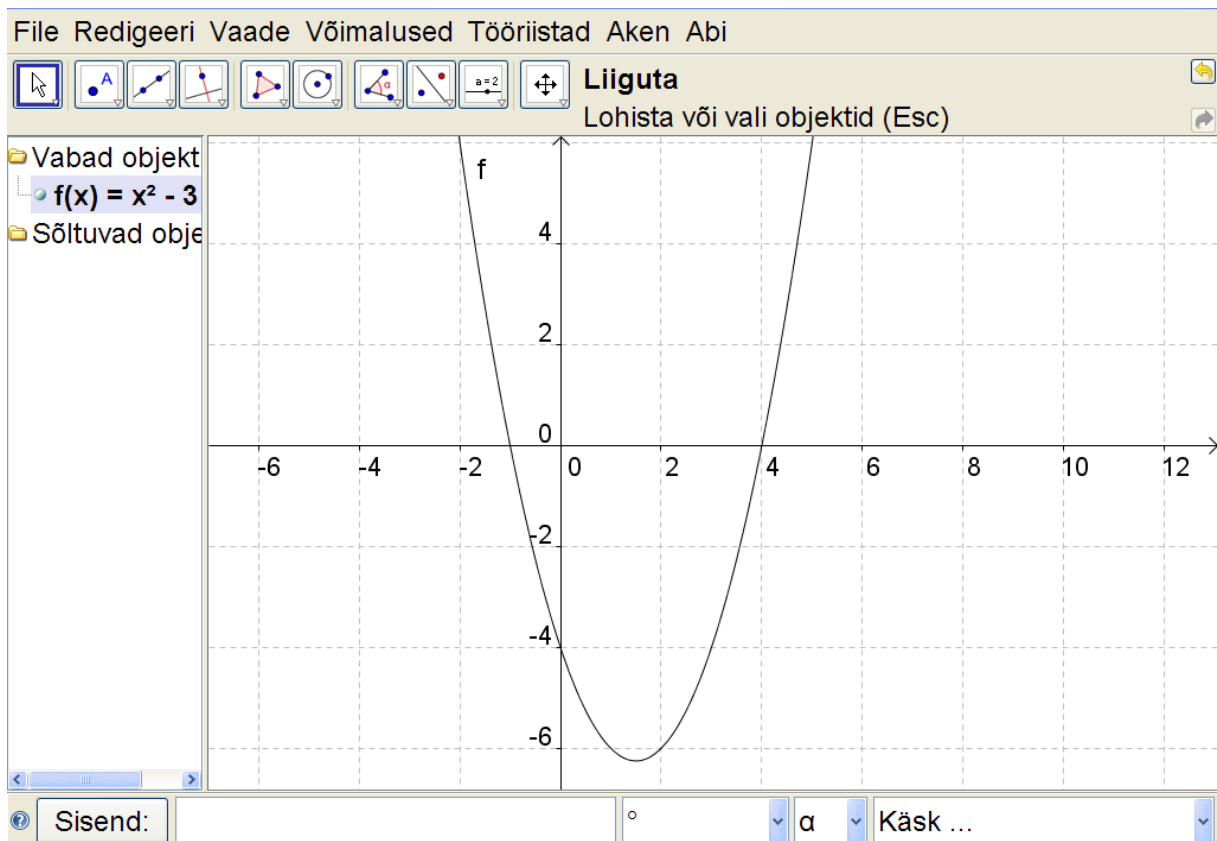
e) funktsiooni graafiku joonestamiseks tuleb funktsioon sisestada ekraani allosas olevalt realt

„Sisend:“, s.t. . Joonis ilmub ekraanile pärast ENTER klahvile vajutamist.

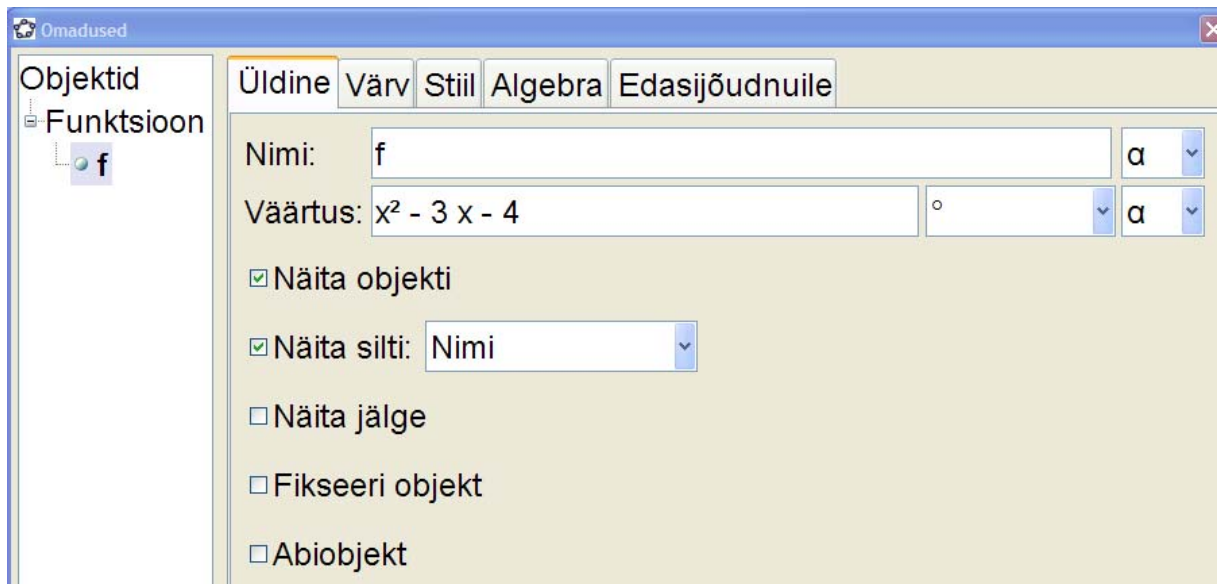
Funktsiooni võib arvutisse sisestada kolmel erineval viisil:

$f(x) = x^2 - 3x - 4$ ,  $y = x^2 - 3x - 4$  või lihtsalt  $x^2 - 3x - 4$ . Astme märgi  $^$  saamiseks on jällegi mitu võimalust, üldiselt soovitan kasutada klahvikombinatsiooni SHIFT+CTRL+ALT+Ä ja hiljem, korduva kasutamise puhul võib selle märgi salvestada puhvrisse ja siis CTRL+V abil vajalikku kohta paigutada. Astme võib lihtsamatel juhtudel asendada korrutusega, näiteks  $x^2$  asemel sisestada  $x*x$ .

Kui kõik on tehtud nii, nagu eespool kirjeldatud, siis saame joonise



Mida saame nüüd selle joonisega teha? Me võime muuta joone paksust ja joone värvi. Selleks läheme hiirega joone peale ja vajutame hiire paremat nuppu. Avanenud menüüst valime „Omadused“ (v.t. pilti)

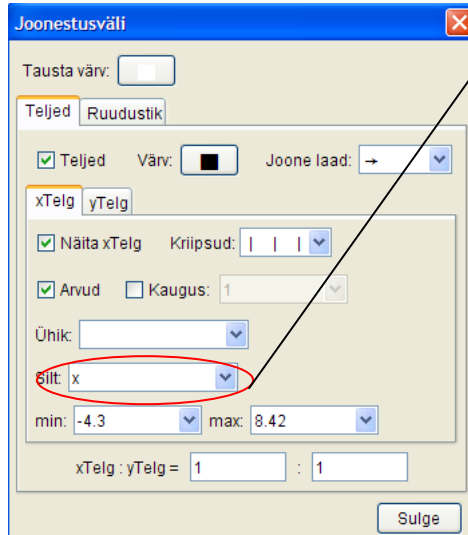


Valides „Värv“ saame muuta joone värvi, valides „Stiil“ saab muuta joone paksust. Graafiku näitamisel klassis on hea, kui joone paksus on 5-7 pt.

Kui „Näita silti:“ on aktiivne (ruudus on linnuke), siis on joonise juures vastava funktsiooni nimi, kuid saab valida ka võimaluse, et näidataks nii nime, kui ka funktsiooni algebralist kuju.

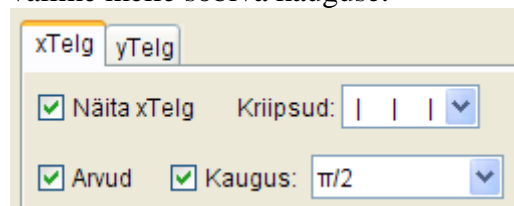
## Harjutusülesanne

1. Avage programm.
2. Tekitage töölehele koordinaatvõrgustik (*Vaade* -> *Ruudustik*) ja märkige telgedele nimed  $x$  ja  $y$ . Selleks klõpsake joonestusväljal hiire parema nupuga, tekib järgmine pilt:



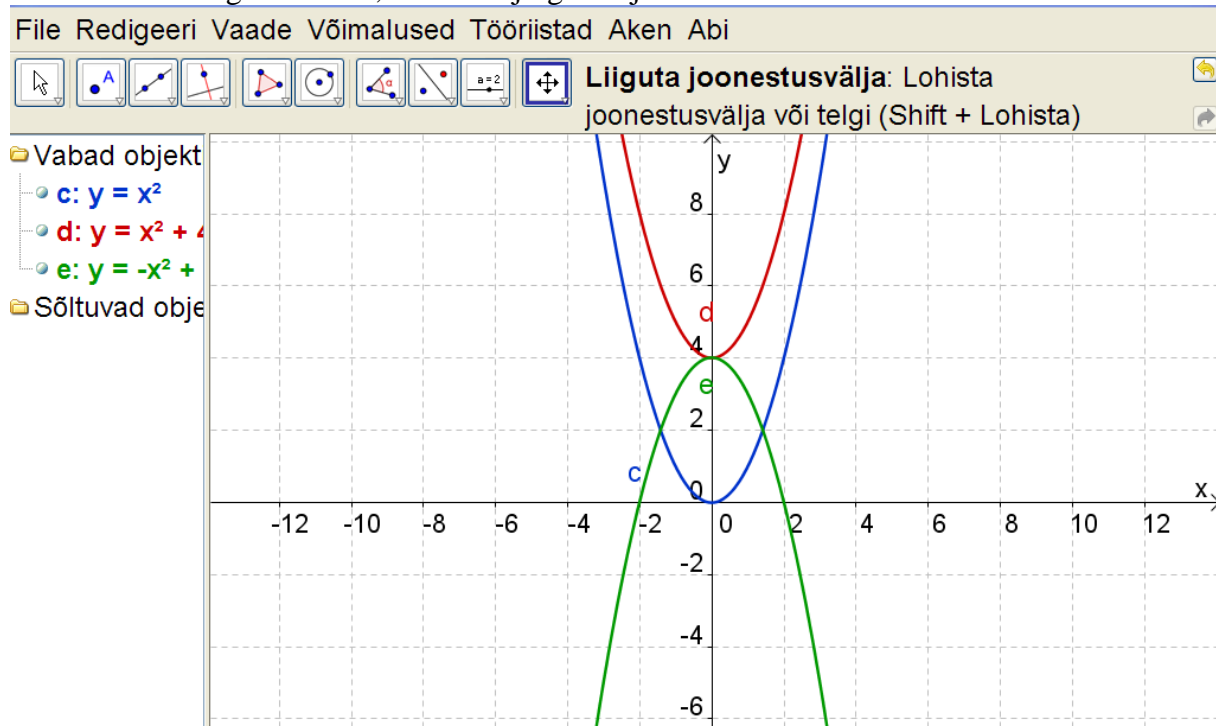
Lahtrisse „Silt“ valige  $x$ . Vajutades nupule „yTelg“ valige sildiks  $y$ . Lõpetamiseks vajutage nupule „Sulge“.

Pildilt on näha, et „Kauguse“ ruut on märgistamata. Sel juhul on ühiku pikkuseks vaikimisi 1. Kui teeme trigonomeetriliste funktsioonide graafikuid, siis on hea võtta  $x$  – teljel ühiku pikkuseks  $\pi$  või  $0,5\pi$ . Sellised pikkused saame kätte, kui paneme „Kaugus“ kasti linnukese ja valime meile sobiva kauguse.



3. Joonestage ühele töölehele funktsioonide  $y = x^2$ ,  $y = x^2 + 4$  ja  $y = -x^2 + 4$  graafikud.
4. Pange joone paksuseks 5 pt.
5. Värvige esimene graafik siniseks, teine punaseks ja kolmas roheliseks.


Kui olete kõik õigesti teinud, siis saate järgmise joonise:

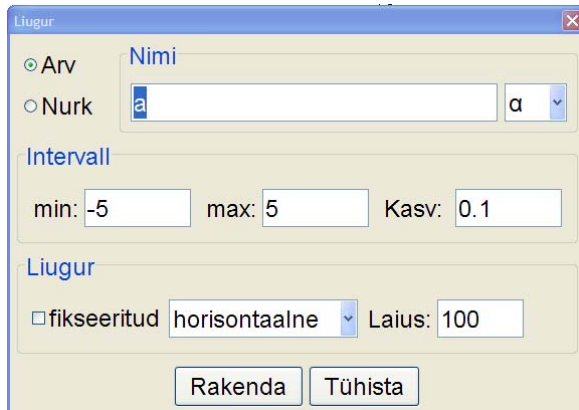


## Funktsiooni graafikute teisendused

Graafikute teisenduste demonstreerimiseks soovitan kasutada *liugurite* abi. Liuguri



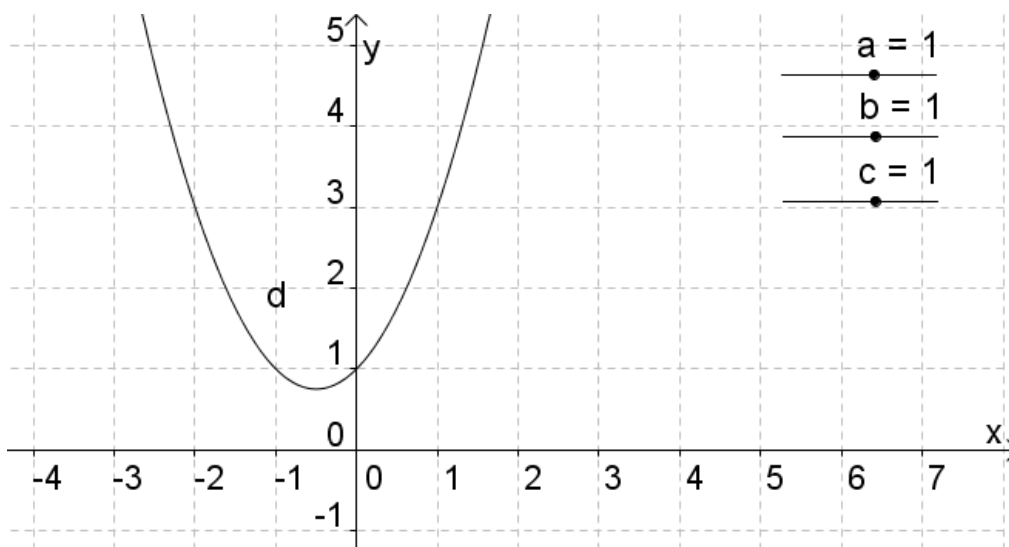
tegemiseks on GeoGebras nupp . Ühe graafiku tegemiseks võime kasutada ühte või mitut liugurit. Nende tegemiseks vajutame menüüribas eespool „liuguri“ nupule ja meile avaneb aken



Programm pakub parameetri tähiseks  $a$  ja intervalliks, milles  $a$  saab muutuda on lõik  $-5$ -st  $5$ -ni (soovi korral saame seda muuta). Vajutades „Rakenda“ nupule ilmub liugur meie töölauale.

Kui soovime uurida, kuidas mõjutavad arvud  $a$ ,  $b$  ja  $c$  ruutfunktsiooni  $y = ax^2 + bx + c$  graafiku kuju, siis tekitame kolm liugurit  $a$ ,  $b$  ja  $c$ .

Kui need on tehtud, siis sisendrealale kirjutame  $y = a * x * x + b * x + c$ . Tärnid tähendavad siis korrutamise märke. Tekib järgmine pilt:



Parameetrite  $a$ ,  $b$  ja  $c$  väärtust saab hiire abil muuta (seda saab ka klaviatuuri nooleklahvidega). Muutes arvu  $a$ ,  $b$  või  $c$  suurust hakkab graafik teljestikus nihkuma. Sellisel lihtsal viisil on võimalik lastele näidata, kuidas ruutfunktsiooni graafiku kuju sõltub parameetritest  $a$ ,  $b$  ja  $c$ . Sama meetod on kasutatav mistahes funktsiooni korral ja kindlasti soovitan seda kasutada astmefunktsioonide ning iseäranis trigonomeetriliste funktsioonide omaduste uurimisel.

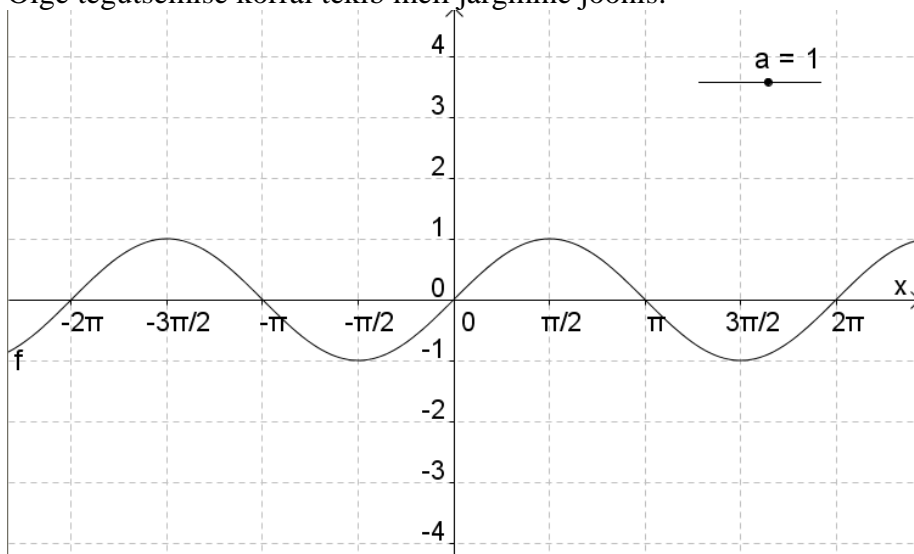
Trigonomeetriliste funktsioonide graafikute joonestamisel soovitan võtta  $x$ -teljel ühiku pikkuseks  $0,5\pi$ .

## Harjutusülesanne

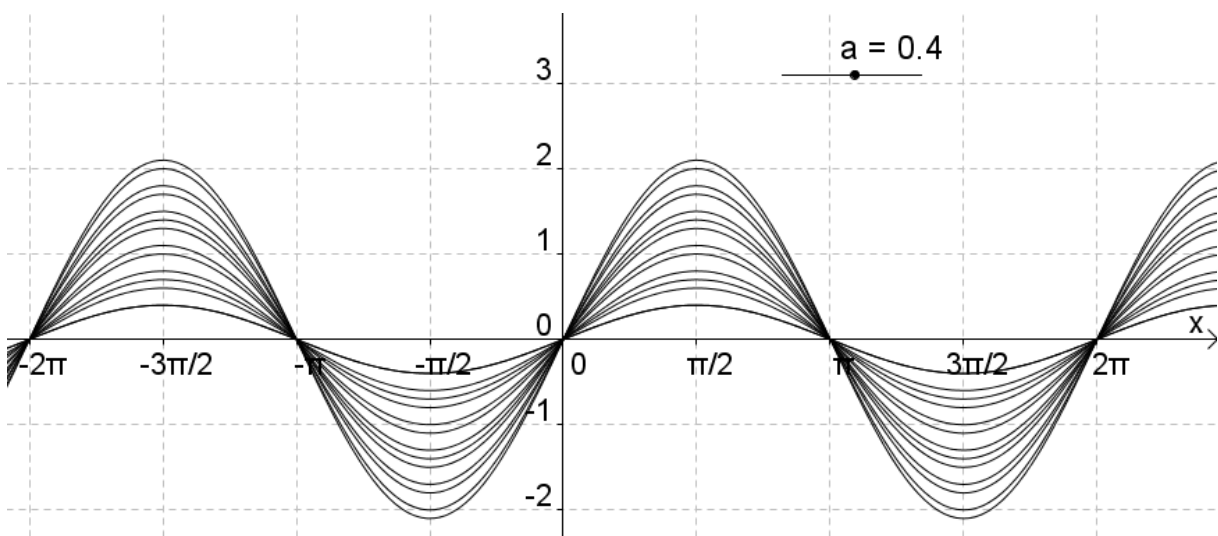
Joonestame funktsiooni  $y = a \cdot \sin x$  graafiku, kus parameeter  $a$  on meie poolt vabalt muudetav. Sellise joonise abil saame näidata, kuidas muutub võnkeamplituud.

Parameetri  $a$  tekitamiseks kasutame jällegi liugurit. Laseme arvu  $a$  väärtustel muutuda lõigus  $[-7; 7]$ . Kui see on tehtud, siis kirjutame reale SISEND  $y=a \cdot \sin(x)$

Õige tegutsemise korral tekib meil järgmine joonis:



Hiire rulliku abil võime joonist suurendada ja vähendada. Lisaks on meil võimalus näidata, kuidas parameetri  $a$  muutumisel graafik muutub. Selleks läheme hiirega joone peale ja teeme parema nupuga klõpsu ja valime paneme „Jälg Sisse“ ette linnukesel. Kui nüüd muudame parameetri  $a$  väärtust, siis saame sellise joonise:



Funktsiooni graafiku juurde võime kirjutada ka funktsiooni nime. Selleks teeme nii: Hiire parem klõps joonel -> Omadused -> Näita Silti -> Nimi ja väärtus.



### 3. ÜLESANNETE LAHENDAMINE GEOGEBRA ABIL

GeoGebra abil saab lahendada mitmeid põhikooli ja gümnaasiumi planimeetria ülesandeid ning programm on rakendatav ka funktsioonidega seotud ülesannete lahendamiseks. Selleks, et mingit ülesannet üritada lahendada GeoGebra abil tuleb

- uurida, kas GeoGebras on olemas vahendid selle ülesande lahendamiseks;
- selgitada välja, kas mõne teise vahendiga pole ülesande lahendamine otstarbekam või on hoopiski tark ülesanne lahendada ilma arvutiprogrammi kasutamata.

Põhikooli matemaatika kursusest saab GeoGebra abil lahendada järgmisi ülesandetüüpe:

- kolmnurga konstrueerimine (kõik võimalused);
- kolmnurga übermõõt ja pindala;
- kolmnurga geomeetrised kohad;
- ringjoonega seotud ülesanded;
- hulknurgaga seotud ülesanded;
- ruudu, ristküliku, rombi, trapetsi ja rööpküliku omaduste uurimisel;
- kujundite samasusteisendused (pööre, lüke ja peegeldamine) ning homoteetsus;
- täisnurkse kolmnurga lahendamine;
- funktsioonid (kõik ülesandetüübid põhikooli kursusest).

Gümnaasiumi matemaatika kursusest tasub ära nimetada teemad, mille puhul on GeoGebra rakendatav:

- vektorid;
- joone võrrand tasandil;
- kolmnurga lahendamine;
- tippudega antud kujundi übermõõdu ja pindala leidmine;
- funktsioonidega seotud ülesanded.

Programmi saab kasutada konkreetsete õpikuülesannete lahendamiseks nii kooli arvutiklassis kui ka kodus.

### 4. Näited.

#### **1. Koosinusfunktsiooni graafiku uurimine.**

Tööleht on html-fail ja asub internetis aadressil

<http://www.allarveelmaa.com/ematerjalid/koosinusfunktsioon1.html>

Töölehe päises on selgitus, mida selle töölehega tahetakse teha ja seda ma siin seetõttu eraldi enam ära ei too. Töölehe alaosas on konkreetset tööülesanded, mida õpilane peab täitma. Internetti ülespanemise eelis on see, et juhul, kui õpilasel jäi ülesande lahendamine arvutiklassis pooleli, siis saab ta seda hiljem kodus jätkata.

#### **2. Ruutfunktsiooni $y = ax^2 + c$ omaduste uurimine.**

Tööleht on html-fail ja asub internetis aadressil

<http://www.allarveelmaa.com/geogebra/ruutfunktsioon6.html>

Kõik tööülesanded on kirjas töölehel.

#### **3. Siinus, koosinus ja tangens täisnurkses kolmnurgas (9. klass)**

Tööleht on html-fail ja asub internetis aadressil



<http://www.allarveelmaa.com/geogebra/trigoseosed.html>

Tööleht on mõeldud tunnis kasutamiseks siinuse, koosinuse ja tangensi mõiste sissetoomisel. Sellel töölehel on ka küsimused, millele otsitakse tunnis koos vastuseid.



Konkursitööd is licensed under a [Creative Commons Attribution-Noncommercial 3.0 Unported](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/) License.

Based on a work at [www.allarveelmaa.com](http://www.allarveelmaa.com).